



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

Министерство образования и науки Российской Федерации

ИВАНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра алгебры и математической логики

ОДОБРЕНО:

Руководитель ОП

(подпись)

Д.Н. Азаров

«2» июня 2018 г.

**Рабочая программа дисциплины**

Финитная аппроксимируемость групп и ее обобщения

Уровень высшего образования:	Подготовка кадров высшей квалификации
Квалификация выпускника:	Исследователь. Преподаватель-исследователь
Направление подготовки:	01.06.01 Математика и механика
Направленность (профиль) образовательной программы:	Математическая логика, алгебра и теория чисел

Иваново



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

---

### 1. Цели освоения дисциплины

- получение аспирантами глубоких знаний по следующему направлению современной теории групп: аппроксимационные свойства некоторых классов групп и свободных конструкций (финитная аппроксимируемость, финитная аппроксимируемость относительно сопряженности, финитная отделимость подгрупп, хопфовость, аппроксимируемость конечными  $p$ -группами;
- постановка перед аспирантами научных проблем и создание базы для дальнейших научных исследований по указанным выше направлениям теории групп;
- формирование у аспирантов высокого уровня математической культуры и интуиции, в том числе способности к критическому восприятию и творческому воспроизведению известных математических результатов, а также способности к самостоятельным абстрактным математическим рассуждениям в области современной теории групп;
- формирование у аспирантов навыков научно-исследовательской работы (способности самостоятельно доказывать известные и новые утверждения, выдвигать гипотезы, подтверждать или опровергать их, способности порождать новые идеи и получать новые научные результаты в области современной теории групп).

### 2. Место дисциплины в структуре ОП

Данная дисциплина является дисциплиной по выбору (Б1.В.ДВ.1.1). Для ее успешного изучения необходимы «входные» знания и умения, полученные в процессе изучения дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел», включенной в программу аспирантуры.

Для освоения данной дисциплины обучающийся должен:

- знать теорию групп и комбинаторную теорию групп в объеме, предусмотренном рабочей программой дисциплины «Математическая логика, алгебра и теория чисел»,
- уметь работать с абстрактными алгебраическими системами,
- владеть высоким уровнем математической культуры и интуиции.

Содержание дисциплины является основой научной работы аспирантов, занимающихся изучением аппроксимационных свойств групп, и способствует научной работе аспирантов в рамках написания диссертационных работ по этому направлению. На этой дисциплине основаны научно-исследовательская деятельность аспиранта и подготовка научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук.

### 3. Планируемые результаты обучения по дисциплине

#### 3.1. Компетенции, формированию которых способствует дисциплина

При освоении дисциплины формируются следующие компетенции в соответствии с ФГОС ВО по данному направлению подготовки:

а) универсальные (УК):

УК-1. Способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях.

б) общепрофессиональные (ОПК):

ОПК-1. Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий.

ОПК-2. Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования.

в) профессиональные (ПК):

ПК-1. Способность развивать свою математическую интуицию, порождать новые идеи и получать новые научные результаты в области алгебры и математической логики.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

---

ПК-2. Способность к научной дискуссии и умение публично представлять собственные научные результаты.

ПК-3. Способность к написанию научных работ, содержащих новые результаты в области алгебры и математической логики.

### **3.2. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине, соотнесенных с формируемыми компетенциями**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

**Знать:** современные результаты и проблематику по тем направлениям теории групп, которые занимают изучением аппроксимационных свойств групп и свободных конструкций (эти знания лежат в основе всех перечисленных выше компетенций).

**Уметь:** восстанавливать, воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных теорем теории групп и комбинаторной теории групп, которые связаны с изучением аппроксимационных свойств, самостоятельно рассуждать и решать научные задачи в указанной выше области, обосновывать или опровергать научные гипотезы, выдвигать научные гипотезы (ОПК-1), вести научную дискуссию (ПК-2), развивать свою математическую интуицию (ПК-1) на основе глубоких знаний современной алгебры, проводить самостоятельные научные исследования (ОПК-1), порождать новые научные идеи (УК-1) на основе глубоких знаний и математической интуиции (ОПК-1, ПК-1), реализовывать свои идеи в виде научных результатов (ОПК-1), уметь публично представлять научные результаты (ПК-2), быть готовым к критическому анализу известных результатов в сфере своих научных интересов (УК-1).

**Владеть:** навыками работы с абстрактными алгебраическими системами, навыками научно-исследовательской работы в сфере своих научных интересов (ОПК-1), высоким уровнем математической культуры и интуиции (ПК-1), навыками перехода от интуитивных научных идей к их четкому и ясному изложению в надлежащем виде – в виде научных публикаций (ПК-3), технологиями поиска информации с помощью сетевых ресурсов, владеть навыками преподавательской работы в части, касающейся умения публично представлять и разъяснять тот или иной математический материал (ОПК-2).

## **4. Объем и содержание дисциплины**

Объем дисциплины составляет 3 зачетные единицы (108 академических часов).

### **4.1. Содержание дисциплины по разделам (темам), соотнесенное с видами и трудоемкостью занятий лекционно-семинарского типа**



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

№ п/ п	Разделы (темы) дисциплины	Семестр	Виды занятий, их объем (в ак. часах, по очной форме обучения)		Формы текущего контроля успеваемости (по очной форме обучения)
			Занятия лекцион- ного типа	Занятия семинар- ского типа	Формы промежуточной аттестации
1 Фinitно аппроксимируемые групп					
1.1	Определение и простые свойства фinitно аппроксимируемых групп	6	1	2	
1.2	Фinitная аппроксимируемость и подгруппы конечного индекса	6	1	2	
1.3	Фinitная аппроксимируемость групп автоморфизмов	6	1	1	
1.4	Фinitная аппроксимируемость расщепляемых расширений групп	6	1	1	
1.5	Аппроксимируемость конечными $p$ -группами	6	1	2	
1.6	Фinitная отделимость и отделимость в классе конечных $p$ -групп	6	1	1	
1.7	Фinitная аппроксимируемость относительно сопряженности и хопфовость	6	1	1	
2 Свободные конструкции групп					
2.1	Определяющие соотношения в группе	6	1	1	
2.2	Свободные группы и их аппроксимационные свойства	6	1	1	
2.3	Свободные произведения групп и их аппроксимационные свойства	6	1	1	
2.4	Свободные произведения групп с объединенной подгруппой	6	1	1	
2.5	HNN-расширения групп	6	1	1	
2.6	Фinitная аппроксимируемость свободных произведений групп с объединенной подгруппой	6	2	1	
2.7	Аппроксимируемость конечными $p$ -группами свободных произведений групп с объединенной подгруппой	6	2	1	
2.8	Фinitная аппроксимируемость HNN-расширений	6	2	1	
Итого за 3-й семестр			18	18	Зачет с оценкой



Итого по дисциплине	18	18	
---------------------	----	----	--

#### 4.2. Развернутое описание содержания дисциплины по разделам (темам)

##### Раздел 1. Фinitная аппроксимируемость групп

###### Тема 1.1. Определение и простые свойства фinitно аппроксимируемых групп.

Определение фinitно аппроксимируемой группы на языке гомоморфизмов. Фinitная аппроксимируемость группы целых чисел и групп целочисленных матриц. Замкнутость класса всех фinitно аппроксимируемых групп относительно подгрупп, прямых и декартовых произведений. Фinitная аппроксимируемость конечно порожденной абелевой группы. Отсутствие неединичных полных элементов в группе как необходимое условие ее фinitной аппроксимируемости. Отсутствие неединичных полных элементов в абелевой группе как необходимое и достаточное условие ее фinitной аппроксимируемости (теорема Мальцева). Фinitная аппроксимируемость мультипликативной группы рациональных чисел и любой собственной подгруппы аддитивной группы рациональных чисел.

**Тема 1.2. Фinitная аппроксимируемость и подгруппы конечного индекса.** Свойство транзитивности для подгрупп конечного индекса. Теорема Пуанкаре. Пересечение всех подгрупп данной группы, сопряженных с фиксированной подгруппой конечного индекса, как нормальная подгруппа конечного индекса. Фinitно аппроксимируемые группы как группы в которых тривиально пересечение всех подгрупп конечного индекса. Замкнутость класса всех фinitно аппроксимируемых групп относительно конечных расширений. Фinitно аппроксимируемые группы как подгруппы декартовых произведений конечных групп.

**Тема 1.3. Фinitная аппроксимируемость групп автоморфизмов.** Группы автоморфизмов групп и характеристические подгруппы. Гомоморфизм индуцирования группы автоморфизмов группы  $G$  в группу автоморфизмов фактор-группы группы  $G$  по ее характеристической подгруппе. Пересечение всех подгрупп фиксированного конечного индекса конечно порожденной группы как характеристическая подгруппа конечного индекса. Пример фinitно аппроксимируемой группы, группа автоморфизмов которой не является фinitно аппроксимируемой. Теорема Смирнова – Баумслага о фinitной аппроксимируемости группы автоморфизмов конечно порожденной фinitно аппроксимируемой группы. Обобщение теоремы Смирнова - Баумслага.

**Тема 1.4. Фinitная аппроксимируемость расщепляемых расширений групп.** Пример расщепляемого расширения фinitно аппроксимируемой группы с помощью фinitно аппроксимируемой группы, не являющегося фinitно аппроксимируемой группой. Теорема Мальцева о фinitной аппроксимируемости расщепляемого расширения конечно порожденной фinitно аппроксимируемой группы с помощью фinitно аппроксимируемой группы и ее обобщение. Теорема Гирша о фinitной аппроксимируемости полициклической группы как следствие из теоремы Мальцева.

**Тема 1.5. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами.** Различные определения группы, аппроксимируемой конечными  $p$ -группами. Замкнутость класса всех групп, аппроксимируемых конечными  $p$ -группами, относительно подгрупп, прямых и декартовых произведений и расширений с помощью конечных  $p$ -групп. Отсутствие в группе  $p'$ -крючения как необходимое условие ее аппроксимируемости конечными  $p$ -группами. Достаточность этого условия в случае конечно порожденной нильпотентной группы и как следствие теорема Грюнберга об аппроксимируемости конечными  $p$ -группами конечно порожденной нильпотентной группы без кручения. Критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами сверхразрешимой группы.

**Тема 1.6. Фinitная отделимость и отделимость в классе конечных  $p$ -групп.** Различные определения фinitно отделимого подмножества и фinitно отделимой подгруппы.



Финитная отделимость конечного подмножества финитно аппроксимируемой группы. Равносильность финитной отделимости нормальной подгруппы и финитной аппроксимируемости соответствующей фактор-группы. Теоремы о финитной отделимости подгрупп в конечных и расщепляемых расширениях. Финитная отделимость всех подгрупп в полициклических группах. Отделимость подгрупп в классе конечных  $p$ -групп и  $p$ -аналоги некоторых теорем о финитной отделимости. Подгруппы конечно порожденной нильпотентной группы, отделимые в классе конечных  $p$ -групп.

**Тема 1.7. Финитная аппроксимируемость относительно сопряженности и хопфовость.** Понятие финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и его  $p$ -аналог. Теорема Каргаполова о финитной аппроксимируемости относительно сопряженности сверхразрешимых групп. Критерий аппроксимируемости конечными  $p$ -группами относительно сопряженности для сверхразрешимой группы. Хопфовы группы. Теорема Мальцева о хопфовости конечно порожденной финитно аппроксимируемой группы.

## Раздел 2. Свободные конструкции групп

**Тема 2.1. Определяющие соотношения в группе.** Задание группы порождающими символами и определяющими соотношениями. Проблема равенства слов. Теорема Мальцева о разрешимости проблемы равенства в конечно определенной финитно аппроксимируемой группе.

**Тема 2.2. Свободные группы и их аппроксимационные свойства.** Различные определения свободной группы. Несократимая запись элемента свободной группы. Теорема Шрейра о подгруппах свободной группы. Свойства финитной аппроксимируемости, финитной аппроксимируемости относительно сопряженности и аппроксимируемости конечными  $p$ -группами для свободной группы. Аппроксимируемость свободной группы произвольным корневым классом групп. Финитная отделимость конечно порожденных подгрупп свободной группы. Характеризация циклических подгрупп свободной группы, отделимых в классе конечных  $p$ -групп.

**Тема 2.3. Свободные произведения групп и их аппроксимируемость корневыми классами.** Различные определения свободного произведения групп. Несократимая запись элемента свободного произведения групп. Теорема Куроша о подгруппах свободного произведения групп. Декартова подгруппа свободного произведения. Теорема Грюнберга об аппроксимируемости корневым классом групп свободного произведения групп, аппроксимируемых этим классом.

**Тема 2.4. Свободные произведения групп с объединенной подгруппой.** Различные определения свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Вложимость свободных сомножителей в свободное произведение групп с объединенной подгруппой. Существование гомоморфизма свободного произведения групп  $A$  и  $B$  с объединенной подгруппой в группу преобразований множества  $A \times B$ , инъективного на свободных множителях. Несократимая запись элемента свободного произведения групп с объединенной подгруппой, неравенство единице любого элемента, несократимая запись которого содержит более одного слога. Теоремы Х. Неймана о подгруппах свободного произведения групп с объединенной подгруппой.

**Тема 2.5.  $HNN$ -расширения групп.** Определение  $HNN$ -расширения. Вложимость базовой группы в  $HNN$ -расширение. Существование гомоморфизма  $HNN$ -расширения конечной группы  $G$  в группу преобразований группы  $G$ , инъективного на базовой подгруппе. Приведенная запись элемента  $HNN$ -расширения. Лемма Бриттона.

**Тема 2.6. Финитная аппроксимируемость свободных произведений групп с объединенной подгруппой.** Пример свободного произведения с объединенной подгруппой двух финитно аппроксимируемых групп, которое не является финитно аппроксимируемой группой.



Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечных групп с объединенной подгруппой. Совместимые подгруппы в свободных множителях свободного произведения групп с объединенной подгруппой. Фильтрационная теорема Г. Баумслага для свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой. Условия обратимости фильтрационной теоремы Г. Баумслага. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух финитно аппроксимируемых групп с конечной объединенной подгруппой. Финитная аппроксимируемость свободного произведения двух конечно порожденных абелевых групп с объединенной подгруппой. Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух конечно порожденных нильпотентных групп с циклической объединенной подгруппой. Теорема Г. Баумслага о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух свободных групп с циклической объединенной подгруппой.

**Тема 2.7. Аппроксимируемость конечными  $p$ -группами свободных произведений групп с объединенной подгруппой.** Пример свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных  $p$ -групп, которое не аппроксимируемо конечными  $p$ -группами. Критерий Хигмена аппроксимируемости конечными  $p$ -группами свободного произведения с объединенной подгруппой двух конечных  $p$ -групп и  $p$ -аналоги отмеченных выше теорем о финитной аппроксимируемости свободного произведения двух групп с объединенной подгруппой.

**Тема 2.8. Финитная аппроксимируемость HNN-расширений.** Финитная аппроксимируемость HNN-расширения конечной группы. Совместимые подгруппы в базе HNN-расширения. Фильтрационная теорема для HNN-расширений. Финитная аппроксимируемость HNN-расширения финитно аппроксимируемой группы с конечными связанными подгруппами. Критерий финитной аппроксимируемости нисходящих HNN-расширений. Критерий финитной аппроксимируемости групп Баумслага – Солитэра. Некоторые  $p$ -аналоги отмеченных выше теорем о финитной аппроксимируемости HNN-расширений.

## 5. Образовательные технологии

Технология проблемного обучения – демонстрация на лекциях и практических занятиях проблемных ситуаций. Рассматриваются некоторые недавно решенные научные проблемы, а также открытые проблемы теории групп. Проблемы учебного характера как правило формулируются в виде задач и решаются аспирантами самостоятельно и на практических занятиях под руководством и при поддержке преподавателя. Решение каждой задачи должно иметь четкую логическую структуру, содержать необходимые доказательства, пояснения, комментарии, ссылки на теоретические факты.

Информационные технологии: технологии смешанного обучения, использование компьютерных презентаций, обеспечение студентов текстами лекций в электронной форме.

## 6. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы обучающихся

Самостоятельная работа аспирантов состоит в следующем: еженедельная работа с рукописными и электронными конспектами лекций (материалы выдаются аспирантам по мере необходимости), изучение литературы указанной в разделе 8 рабочей программы, выполнение домашних заданий (задания выдаются на каждом практическом занятии, и, при необходимости, в системе электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет» <https://uni.ivanovo.ac.ru>), выполнение домашних контрольных работ творческого характера (разработаны подробные методические указания по их выполнению), подготовка к зачету (вопросы и другие материалы для сдачи зачета доступны каждому аспиранту как в бумажном виде (в ауд. 326 первого уч. корпуса) так и в системе «Мой университет»). Методические пособия по данному курсу находятся в библиотечных фондах ИВГУ, их выходные данные представлены в



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

приложениях к рабочей программе. Там же представлены и другие методические материалы по данной дисциплине.

## **7. Характеристика оценочных средств для текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине**

Итоговый контроль: устный зачет с оценкой. Цель: подведение итогов освоения аспирантами данной дисциплины. Вопросы к зачету приведены в приложениях. Оценивание уровня подготовки аспиранта проводится в форме научного обсуждения, предметом которого являются вопросы современной алгебры и научные результаты аспиранта. Учитываются также результаты выполнения домашнего задания творческого характера, которое соответствует тематике НИР аспиранта.

Для получения оценки «удовлетворительно» необходимо знание основных понятий и классических результатов теории групп, теории финитной аппроксимируемости групп, современных направлений и проблематики тех разделов алгебры, которые входят в сферу научных интересов аспиранта.

Для получения оценки «хорошо» наряду с перечисленным выше необходимо уметь воспроизводить и творчески перерабатывать доказательства классических и современных теорем теории групп и комбинаторной теории групп.

Для получения оценки «отлично» необходимо наряду с перечисленным выше выполнить задание творческого характера, связанное с доказательствами новых нетривиальных алгебраических теорем.

Задания творческого характера даются аспиранту за несколько недель до зачета в качестве домашней работы. Задание связано с изучением результатов конкретной научной статьи по теории групп и получением более сильных (или более общих) результатов. Задание представляет собой «разветвленную» систему связанных между собой задач, которые в совокупности приводят к получению требуемого нового научного результата. Задание проверяется непосредственно на зачете. Демонстрационные версии такого задания приведены в приложении 1.

## **8. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

Основная литература:

1. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 1. Основы алгебры. - 273 с. - ISBN 978-5-94057-453-8 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63140>
2. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 2. Линейная алгебра. - 368 с. - ISBN 978-5-94057-454-5 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63144>
3. Кострикин, А.И. Введение в алгебру : учебник / А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - Ч. 3. Основные структуры алгебры. - 272 с. - ISBN 978-5-94057-455-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=62951>
4. Курош, Александр Геннадиевич. Теория групп / А. Г. Курош .— М. : Физматлит, 2011 .— 805 с .— (Классика и современность. Математика) .— ISBN 978-5-9221-1349-6.

Дополнительная литература:

1. Сборник задач по алгебре : задачник / под ред. А.И. Кострикин. - М. : МЦНМО, 2009. - 404 с. - ISBN 978-5-94057-413-2 ; То же [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=63274>





Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

---

Ресурсы информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»:

Система электронной поддержки образовательного процесса «Мой университет»

<https://uni.ivanovo.ac.ru>

Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru/>

Профессиональные базы данных и информационно-справочные системы:

ЭБС «Университетская библиотека онлайн» [www.biblioclub.ru](http://www.biblioclub.ru)

Электронная библиотека ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru>

Электронный каталог НБ ИвГУ <http://lib.ivanovo.ac.ru/index.php/ek>

Международные базы данных:

Web of Science.

Программное обеспечение: операционная система Microsoft Windows, пакет офисных программ Microsoft Office и(или) LibreOffice, интернет-браузер Microsoft Edge и(или) Yandex Browser, Мой университет.

## **9. Материально-техническое обеспечение дисциплины**

Учебные аудитории:

- для проведения занятий лекционного типа с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения, служащими для предоставления учебной информации большой аудитории;

- для проведения занятий семинарского типа, консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации с комплектом специализированной учебной мебели и техническими средствами обучения;

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное комплектом специализированной учебной мебели, компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и обеспечением доступа в ЭИОС.

Демонстрационное оборудование: доска, проектор для презентаций.



Основная профессиональная образовательная программа  
01.06.01 Математика и механика  
Математическая логика, алгебра и теория чисел

---

**Автор(ы) рабочей программы дисциплины:** профессор кафедры алгебры и математической логики ИВГУ, доктор физико-математических наук Азаров Дмитрий Николаевич

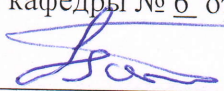
Программа рассмотрена и утверждена на заседании кафедры алгебры и математической логики

«19» апреля 2017 г., протокол № 4.

Программа обновлена

протокол заседания кафедры № 6 от «2» июня 2018 г.

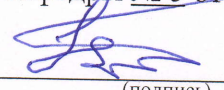
Согласовано:

Руководитель ОП  Д.Н. Азаров  
(подпись)

Программа обновлена

протокол заседания кафедры № 5 от «12» апреля 2019 г.

Согласовано:

Руководитель ОП  Д.Н. Азаров  
(подпись)