Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел $1, 2, \dots, n$. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

Решение 1.

Ответ: нет.

Предположим противное. Пусть S_{m+1} делится на 2^s, но не делится на 2^{s+1}; тогда $s \geq 2$. Это значит, что среди чисел $1, 2, \dots, m+1$ есть число a, делящееся на 2^s. Но тогда число $a/2$ уже не превосходит m и делится на 2^{s-1}; значит, и S_m делится на 2^{s-1}. Поэтому S_{m+1}/S_m не может делиться на степень двойки, бóльшую первой.

Решение 2.

Ответ: нет.

Обозначим $\nu_p(x)$ степень вхождения простого p в разложение натурального x.

1 случай) Пусть $m+1 = p^k$, где p — простое (и $k \geq 1$).

Тогда если q — простое, $q \neq p$, то (поскольку $m+1$ не делится на q, имеем $\nu_q(S_{m+1}) = \nu_q(S_m)$). Также $\nu_p(S_{m+1}) = k$ и $\nu_p(S_m) = k-1$ (так как ни одно из чисел $1, 2, \dots, m$ не делится на p^k, но среди них есть число, делящееся на p^{k-1}, например само p^{k-1}).

Итак, в первом случае $S_{m+1} = pS_m$.

2 случай) Пусть теперь $m+1$ не равно степени простого числа. Тогда пусть для фиксированного простого p выполнено $\nu_p(m+1) = t$. Тогда $m+1 > p^t$, поэтому среди чисел $1, 2, \dots, m$ есть число, кратное p^t, например, само p^t. Значит, $\nu_p(S_m) \geq t = \nu_p(m+1)$. Значит, $\nu_p(S_{m+1}) = \nu_p(S_m)$.

Повторяя рассуждение для каждого простого p. получаем, что во втором случае $S_{m+1} = S_m$.

Из рассмотрения случаев 1 и 2 получается вывод: S_{m+1}/S_m может быть равно только простому числа или 1.