



Всероссийская олимпиада школьников по экономике

Региональный этап

2020/2021 год

Конкурс: 11 класс

Второй тур. Задачи. Решения.

Продолжительность работы — 140 минут.

Максимальное количество баллов за задачи — 120.

Каждая задача оценивается из 30 баллов.

Уважаемые коллеги!

В этом документе вы найдете решения задач регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по экономике 2021 года. Мы надеемся, что сами задания, а также процесс их проверки доставят вам удовольствие.

При проверке задач нужно придерживаться схем, разработанных Центральной предметно-методической комиссией (ЦПМК) по экономике и приведенных в данном документе, а также «Требований к проведению регионального этапа по экономике в 2020/2021 учебном году» (раздел 5). Общие принципы проверки приведены в «Требованиях...» и в списке ниже:

1. Для проверки задач члены жюри делятся на рабочие группы, каждая группа проверяет конкретную задачу, один из членов рабочей группы назначается ее руководителем. Такое разделение труда (при котором отдельные члены жюри проверяют конкретные задачи, а не работы целиком) способствует одинаковому уровню требований к решениям, облегчает разрешение спорных случаев. Состав рабочих групп утверждается председателем жюри или его заместителем. В случае если некоторые рабочие группы завершают проверку своих задач раньше других, их участники могут присоединиться к другим рабочим группам.
2. При наличии возможности желательно организовать проверку каждой задачи в каждой работе не менее чем двумя членами жюри.
3. Жюри проверяет работы в соответствии со схемами проверки, разработанными ЦПМК. В случае наличия в работе участника фрагмента решения, который не может быть оценен в соответствии со схемой проверки, жюри принимает решение исходя из своих представлений о справедливом оценивании, при возможности консультируясь с составителями заданий. Выполнение данного требования имеет исключительную важность, поскольку по итогам регионального

этапа составляется единый рейтинг школьников по России, на основании которого определяется состав участников заключительного этапа.

4. Жюри оценивает только то, что написано в работе участника: не могут быть оценены комментарии и дополнения, которые участник может сделать после окончания тура (например, в апелляционном заявлении).
5. Фрагменты решения участника, зачеркнутые им в работе, не проверяются жюри. Если участник хочет отменить зачеркивание, он должен явно написать в работе, что желает, чтобы зачеркнутая часть была проверена. Если невозможно однозначно определить, хотел ли участник, чтобы фрагмент решения был проверен, этот фрагмент не проверяется.
6. Участник должен излагать свое решение понятным языком, текст должен быть написан разборчивым почерком. При этом жюри не снижает оценку за помарки, исправления, орфографические, пунктуационные и стилистические ошибки, недостатки в оформлении работы, если решение участника можно понять.
7. Все утверждения, содержащиеся в решении участника, должны быть либо общеизвестными (стандартными), либо логически следовать из условия задачи или из предыдущих рассуждений участника. Участник может не доказывать общеизвестные утверждения. Вопрос определения общеизвестности находится в компетенции жюри, но в любом случае общеизвестными считаются факты, изучаемые в рамках школьной программы. Также, как правило, общеизвестными можно считать те факты, которые многократно использовались в олимпиадах прошлых лет и приводились без доказательств в официальных решениях. Все не общеизвестные факты, не следующие тривиально из условия, должны быть доказаны. Решение, которое явно или скрыто опирается на не доказанные участником не общеизвестные факты, оценивается неполным баллом.
8. Участник может решать задачи любым корректным способом, жюри не повышает баллы за красоту и лаконичность решения, а равно не снижает их за использование нерационального способа. Корректным может быть решение, которое нестандартно и отличается по способу от авторского (приведенного в материалах составителей). При этом недопустимо выставление баллов «за объем»: если участник написал большой текст, не содержащий продвижений в решении задачи, такой текст должен быть оценен в 0 баллов.
9. Работа участника не должна оставлять сомнений в том, каким способом проводится решение задачи. Если участник излагает несколько решений задачи, которые являются разными по сути (и, возможно, приводят к разным ответам), и некоторые из решений являются некорректными, то жюри не обязано выбирать и проверять корректное решение.
10. Если в решении участника содержатся противоречащие друг другу суждения, то они, как правило, не оцениваются, даже если одно из них верное. Нарушение логических последовательностей (причинно-следственных связей), как правило, приводит к существенному снижению оценки.
11. В работе участника должно содержаться доказательство полноты и правильности его ответа, при этом способ получения ответа, если это не требуется для до-

казательства его полноты и правильности, излагать необязательно.

12. Штрафы, которые жюри присваивает за вычислительные ошибки, зависят от серьезности последствий этих ошибок. Вычислительная ошибка, которая не привела к существенному изменению дальнейшего решения задачи и качественно не изменила получаемых выводов, штрафуются меньшим числом баллов, чем вычислительная ошибка, существенно повлиявшая на дальнейшее решение.
13. Если задача состоит из нескольких пунктов, то участник должен четко обозначить, где начинается решение каждого пункта. Каждый фрагмент решения проверяется в соответствии с критериями проверки, разработанными для указанного участником пункта. Если в решении участника одного из пунктов задачи содержится фрагмент решения, который в соответствии со схемой оценивания может принести баллы за другой пункт задачи, жюри может не ставить эти баллы, если из решения неочевидно, что участник понимает применимость результатов к другому пункту. При решении пунктов задачи участник может ссылаться на собственные решения (ответы) к другим пунктам или на общую часть решения, выписанную в начале.
14. Если ошибка была допущена в первых пунктах задачи и это изменило ответы участника в последующих пунктах, то в общем случае баллы за следующие пункты не снижаются, то есть они проверяются так, как если бы собственные результаты, которыми пользуется участник, были правильными. Исключением являются случаи, когда ошибки в первых пунктах упростили или качественно исказили логику дальнейшего решения и/или ответы — в этих случаях баллы за последующие пункты могут быть существенно снижены.
15. Если участник в своем решении опирается на метод перебора вариантов, то для получения полного балла должны быть разобраны все возможные случаи. Упущение некоторых случаев может привести к существенному снижению оценки (непропорциональному доле неразобраных случаев в общем их числе).
16. Если для решения участнику необходимы дополнительные предпосылки, то он должен их сформулировать. Дополнительные предпосылки при этом не должны менять смысл задачи и существенно сужать круг обсуждаемых в решении ситуаций по сравнению с тем, который задан в условии.

Составители написали приведенные ниже решения более подробно, чем если бы им самим пришлось участвовать в олимпиаде. Данный документ содержит пояснения, примечания, альтернативные способы решений, которые предназначены исключительно для информирования жюри, а также всех, кто будет разбирать эти задачи в дальнейшем при изучении экономики и подготовке к олимпиадам. От участников не нужно требовать слишком подробного решения — в любом случае руководствуйтесь здравым смыслом и старайтесь определить, действительно ли участник понимает, как решается задача.

При этом помните, что приведенные ниже схемы проверки и обозначенные выше принципы будут применяться во всех регионах; для сопоставимости результатов необходимо следовать им максимально четко. В случае если решение участника не укладывается в предложенную схему проверки, примите решение исходя из свое-

го опыта и справедливости. В спорных случаях пишите нам. Если ЦПМК захочет дать комментарии по проверке отдельных заданий (например, ответить на часто задаваемые вопросы), она сделает это на странице

<http://ILoveEconomics.ru/olimp/region/grading>. Если ЦПМК посчитает нужным прояснить какие-либо аспекты авторских решений или схем проверки, она сделает это в день проведения этапа на той же странице, поэтому членам жюри из всех регионов рекомендуется следить за содержанием этой страницы при проверке работ.

Если вам потребуется неотложная консультация в день проведения регионального этапа, вы можете написать ЦПМК по экономике напрямую: cpmk@iloveeconomics.ru.

Ваша ЦПМК

Для справки. Критерии выполнения заданий олимпиады. В таблице приведено количество баллов, при котором задание считается выполненным. Эти сведения нужны для подсчета статистики результатов олимпиады; на индивидуальные результаты участников не влияют.

Номер задания	Баллы
1	2
2	6
3	10
4	14
5	12
6	12
7	12
8	12

Задание 5. Шок на рынке масок (10-11 класс) (30 баллов)

Рынок медицинских масок в стране Z совершенно конкурентный. Функция издержек фирмы, если она вошла на рынок, задается уравнением $TC(q) = q^2 + 4$, где q — количество масок, произведенное данной фирмой (в тыс. шт.). Если фирма не входит на рынок, ее прибыль равна нулю. В краткосрочном равновесии число фирм на рынке фиксировано. В долгосрочном равновесии число фирм определяется таким образом, что каждой фирме безразлично, входить на рынок или нет.

а) (14 баллов) Изначально рыночный спрос на маски задавался уравнением $Q_0(P) = 40 - P$ и рынок находился в состоянии долгосрочного равновесия. Найдите рыночные цену, объем и количество фирм в этом равновесии.

б) (6 баллов) В связи с пандемией спрос на маски резко вырос — до $Q_1(P) = 400 - P$. Однако в краткосрочном периоде новые фирмы не успели войти на рынок, чтобы удовлетворить возросший спрос, и число фирм осталось таким же, как в пункте а). Найдите рыночные цену и объем в новом краткосрочном равновесии.

в) (10 баллов) С течением времени спрос остался на уровне $Q_1(P) = 400 - P$, однако на рынок вошли новые фирмы, желающие заработать. Установилось новое долгосрочное равновесие. Найдите рыночные цену, объем и количество фирм в этом равновесии.

Решение

а) **Способ 1.** Типичная фирма максимизирует прибыль

$$\pi(q) = Pq - q^2 - 4 \rightarrow \max_{q \geq 0}.$$

Графиком этой квадратичной функции является парабола с ветвями вниз и вершиной в точке $q^*(P) = 0,5P$ (это не что иное, как функция предложения каждой вошедшей на рынок фирмы). Заметим, что при оптимальном поведении фирмы её прибыль обращается в ноль при цене $P = 4$:

$$\max \pi(q) = \pi(0,5P) = P \cdot 0,5P - (0,5P)^2 - 4 = 0,25P^2 - 4 = 0.$$

Значит, именно такая цена сложится в долгосрочном равновесии. Потребители захотят купить по этой цене $Q_0(4) = 36$ единиц продукции, тогда как каждая действующая на рынке фирма произведёт по $q^*(4) = 2$ единицы; значит, на рынок войдёт $Q_0(4)/q^* = 18$ фирм.

Способ 2. Вспомним, что долгосрочное равновесие на совершенно конкурентном рынке определяется условием $P = MC = AC$; заметим, что MC *возрастают*, поэтому данное условие может быть применено.

Имеем $MC = TC'(q) = 2q$, $AC = TC/q = q + 4/q$. Из условия $MC = AC$ получаем $2q = q + 4/q$, $q^* = 2$, значит $P = MC = 2q^* = 4$. Потребители по этой цене захотят купить $Q_0(4) = 36$ единиц продукции; значит, на рынок войдёт $Q_0(4)/q^* = 18$ фирм.

Способ 3 отличается от способа 2 лишь тем, как получается $q^* = 2$. А именно, $q^* = 2$ можно найти из задачи минимизации средних издержек, $AC = q + 4/q \rightarrow \min$,

$AC' = 1 - 4/q^2 = 0$, производная меняет знак с минуса на плюс, $q^* = 2$. Тот же ответ можно получить из неравенства о средних.

Ответ: $P = 4$, $Q = 36$, $N = 18$.

б) В пункте а) было установлено, что функция предложения каждой фирмы имеет вид $q^* = 0,5P$; рыночное предложение составит $Q_S = 18q^* = 9P$. Тогда в новом краткосрочном равновесии $Q_1(P) = Q_S(P)$, или $400 - P = 9P$, откуда $P = 40$, $Q = 360$.

Ответ: $P = 40$, $Q = 360$.

в) В пункте а) получено, что в долгосрочном равновесии $P = 4$, вывод это цены не зависит от функции спроса. Потребители по этой цене захотят купить $Q_1(4) = 396$ единиц продукции, каждая фирма произведёт по $q^*(4) = 2$ единицы; значит, на рынке будет $Q_1/q^* = 198$ фирм.

Ответ: $P = 4$, $Q = 396$, $N = 198$.

Схема проверки

а) Всего за пункт — 14 баллов.

- Сделано продвижение, позволяющее найти равновесную цену или оптимальный выпуск одной фирмы (в зависимости от способа решения это может быть или постановка задачи типичной фирмы, или указание на условие $P = MC = AC$, или указание на условие $P = \min AC$), — 2 балла.
- При этом если проверка достаточного условия экстремума не сделана (то есть нет указания на направление ветвей параболы, не найдена вторая производная, не обсуждается смена знака первой производной и нет ссылки на возрастание функции MC), то снимается 1 балл. В авторском решении фразы, относящиеся к проверке достаточных условий, выделены курсивом. При определении минимума AC через неравенство о средних проверка не требуется.
- Найдена равновесная цена в исходном долгосрочном равновесии — 4 балла.
- Найден объём рыночного спроса при равновесной цене — 6 баллов.
- Найдено количество действующих на рынке фирм — 2 балла.

б) Всего за пункт — 6 баллов.

- С отсылкой к результатам пункта а) приведена индивидуальная функция предложения фирмы — 2 балла.
- Найдена функция краткосрочного рыночного предложения — 2 балла.
- Найдена равновесная цена в краткосрочном равновесии — 1 балл.
- Найден равновесный объём в краткосрочном равновесии — 1 балл.

в) Всего за пункт — 10 баллов.

- Указано, что в новом долгосрочном равновесии установится та же цена, что и в исходном долгосрочном равновесии (т.е. независимо от спроса) — 4 балла.
- Найден объём рыночного спроса при равновесной цене — 3 балла.
- Найдено количество действующих на рынке фирм — 3 балла.

Задание 6. Уклонение от уплаты налогов (30 баллов)

Фирма-монополист работает на рынке со спросом $q_d = 15 - p$, а производство каждой единицы продукции обходится фирме в 5 д.е. Фирма облагается налогом на прибыль по ставке 20 % (естественно, только в случае, если прибыль положительна), но у фирмы есть возможность задекларировать вместо фактической прибыли какую-то меньшую величину и тем самым уклониться от налога. Однако уклонение не является бесплатным: чтобы не платить налог с x д.е. прибыли, необходимо понести затраты в размере $0,01x^2$ д.е. Оплата услуг по уклонению от налога «неофициальна»: фирма не отражает сумму $0,01x^2$ в своих издержках, оплачивая её неформально из своей чистой прибыли, т.е. после уплаты налога.

а) (6 баллов) Какую чистую прибыль получит фирма, если она не будет уклоняться от уплаты налога?

б) (12 баллов) Какую настоящую чистую прибыль (с учётом издержек на уклонение) получит фирма в случае уклонения от налога? Фирма выбирает уровень уклонения x оптимальным образом.

в) (12 баллов) Предположим, государство заинтересовано собрать как можно больше налогов (зная об уклонении, но не имея возможности с ним бороться). После того как государство выбирает ставку налога, фирма выбирает выпуск и уровень уклонения от налога. Какую ставку налога на прибыль следует установить государству?

Решение

а) Фирма максимизирует чистую прибыль:

$$\pi_{net}(q) = (1 - t)\pi_0(q) = (1 - 0,2)((15 - q)q - 5q) = 0,8(10q - q^2) \rightarrow \max_{q \geq 0}.$$

Функция прибыли является квадратичной, ветви параболы направлены вниз, вершина в точке $q^* = 5$; прибыль до вычета налога составит $\pi_0 = 25$; чистая прибыль (после вычета налога) составит $\pi_{net} = 20$.

Ответ: $\pi_{net} = 20$.

б) Фирма заработает прибыль $\pi_0(q)$, затем задекларирует прибыль на уровне $\pi_0(q) - x$, после чего заплатит с этой величины налог, равный $t(\pi_0(q) - x)$, и ещё неофициальным образом оплатит услуги по уходу от налога $0,01x^2$. Таким образом, целевая функция фирмы примет вид

$$\pi_{net}(q, x) = \pi_0(q) - t(\pi_0(q) - x) - 0,01x^2 = (1 - t)\pi_0(q) + tx - 0,01x^2 = 0,8(10q - q^2) + 0,2x - 0,01x^2.$$

Можно увидеть, что чистая прибыль является суммой двух независимых квадратичных функций, ветви парабол направлены вниз, вершины в точках $q^* = 5$ (выпуск по сравнению с пунктом а) не меняется) и $x^* = 10$. «Настоящая» чистая прибыль фирмы составит $\pi_{net} = 21$.

Ответ: $\pi_{net} = 21$.

в) Аналогично пункту б), целевая функция фирмы имеет вид

$$\pi_{net}(q, x) = (1 - t)\pi_0(q) + tx - 0,01x^2 = (1 - t)(10q - q^2) + tx - 0,01x^2.$$

Можно увидеть, что чистая прибыль является суммой двух независимых квадратных парабол с ветвями вниз и вершинами в точках $q^* = 5$ (выпуск по сравнению с пунктом а) не меняется) и $x^* = 50t$. (Строго говоря, $x^* = \min\{50t; \pi_0(q^*)\}$.)

Налоговые поступления (доля t от декларируемой прибыли), если они больше нуля, составят

$$T(t) = t(\pi_0(q) - x) = t(\pi_0(5) - x^*(t)) = t(25 - 50t).$$

Государство максимизирует эту функцию по $t \in [0; 1]$. Функция $T(t)$ квадратичная, ветви параболы направлены вниз, вершина в точке $t^* = 0,25$.

Ответ: $t^* = 25\%$.

Схема проверки

а) Всего за пункт — 6 баллов.

- Корректно записана функция чистой прибыли фирмы от одного аргумента (количества либо цены) — 2 балла.
- Корректно решена оптимизационная задача фирмы — предъявлено оптимальное значение количества либо цены — 2 балла.
- Проверено достаточное условие максимума (подойдёт любая из трёх формулировок: либо сказано, что графиком функции прибыли является квадратная парабола с ветвями вниз, либо сказано, что первая производная убывает, либо сказано, что вторая производная отрицательна) — 1 балл.
- Подсчитана фактическая чистая прибыль фирмы — 1 балл.

б) Всего за пункт — 12 баллов.

- Корректно записана функция фактической чистой прибыли фирмы от двух аргументов (от количества либо цены и от незадекларированной суммы) — 4 балла.
- Корректно решена оптимизационная задача фирмы — предъявлены оптимальные значения количества либо цены и незадекларированной суммы — 4 балла.
- Проверены два достаточных условия максимума (подойдёт любая из трёх формулировок: либо сказано, что графиком функции прибыли является квадратная парабола с ветвями вниз, либо сказано, что первая производная убывает, либо сказано, что вторая производная отрицательна) — 2 балла.
- Подсчитана фактическая чистая прибыль фирмы — 2 балла.

в) Всего за пункт — 12 баллов.

- Корректно записана функция фактической чистой прибыли фирмы от двух аргументов (от количества либо цены и от незадекларированной суммы) при произвольной налоговой ставке — 4 балла.
- Корректно решена оптимизационная задача фирмы — предъявлены оптимальные значения количества либо цены и незадекларированной суммы (при произвольной налоговой ставке) — 2 балла.
- Проверены два достаточных условия максимума (подойдёт любая из трёх формулировок: либо сказано, что графиком функции прибыли является квадратная парабола с ветвями вниз, либо сказано, что первая производная убывает, либо сказано, что вторая производная отрицательна) — 2 балла.

- Корректно записана функция налоговых сборов от одного аргумента (налоговой ставки либо незадекларированной суммы) — 2 балла.
- Корректно решена оптимизационная задача государства — предъявлено оптимальное значение налоговой ставки — 1 балл.
- Проверено достаточное условие максимума (подойдёт любая из трёх формулировок: либо сказано, что графиком функции налоговых сборов является квадратная парабола с ветвями вниз, либо сказано, что первая производная убывает, либо сказано, что вторая производная отрицательна) — 1 балл.

Задание 7. Две цели**(30 баллов)**

В закрытой экономике потребители расходуют две трети от своего располагаемого дохода и вдобавок — при любом значении располагаемого дохода — еще 10 д.е., составляющих автономное потребление. Инвестиции постоянны и равны 40 д.е. В стране взимаются только подоходные налоги по ставке 25%; аккордных налогов и трансфертных платежей нет. Известно также, что потенциальный ВВП этой экономики составляет 300 д.е. Правительство, реализуя свою фискальную политику, может воздействовать только на государственные закупки.

а) (20 баллов) На каком уровне следует установить госзакупки (без изменения текущей ставки подоходного налога), чтобы в экономике установился потенциальный ВВП? А чтобы в экономике был сбалансированный госбюджет?

б) (10 баллов) Теперь предположим, что правительство преследует две цели одновременно и выбирает некий компромиссный вариант. Вторая цель для правительства в 4 раза более важна, чем первая, и потому потери правительства от несоответствия выпуска своему потенциальному значению и от несбалансированного бюджета определяются как

$$L = (Y - Y^*)^2 + 4 \cdot s^2,$$

где Y — фактический ВВП, Y^* — потенциальный ВВП, s — сальдо госбюджета. Чему будут равны госзакупки, если правительство будет принимать решение, минимизируя свои потери?

Решение

а) Поскольку экономика закрытая, $Ex = Im = Xn = 0$, и ВВП будет равен $Y = C + I + G$. По условию $C = C_A + mpc \cdot Y_d = 10 + (2/3) \cdot Y_d$. В силу отсутствия аккордных налогов и трансфертов $T = tY = 0,25Y$ и $Y_d = Y - T = 0,75Y$. Учтя, что $I = 40$, составим уравнение

$$Y = 10 + (2/3) \cdot 0,75Y + 40 + G.$$

Выразив выпуск, получим $Y = 100 + 2G$. Для достижения потенциального ВВП, или формально $Y_1 = Y^*$, должно выполняться $100 + 2G_1 = 300$, откуда $G_1 = 100$. Сальдо бюджета определяется как разница между доходами бюджета и расходами бюджета:

$$s = tY - G = 0,25(100 + 2G) - G = 25 - 0,5G.$$

Чтобы бюджет был сбалансирован, сальдо должно равняться нулю: $25 - 0,5G_2 = 0$, откуда $G_2 = 50$.

Ответ: $G_1 = 100$, $G_2 = 50$.

б) Подставим в задачу правительства найденные ранее $Y = 100 + 2G$ и $s = 25 - 0,5G$:

$$L(G) = (Y(G) - Y^*)^2 + s^2(G) = (100 + 2G - 300)^2 + 4(25 - 0,5G)^2 = 5(G^2 - 180G + 8500) \rightarrow \min_{G \geq 0}$$

Целевая функция является квадратичной, ветви параболы направлены вверх, минимум достигается в вершине: $G^* = 90$.

Ответ: $G^* = 90$.

Схема проверки

Арифметическая ошибка в любом из пунктов ведёт к потере 1 балла автоматически, а далее в зависимости от того, насколько сильно данная ошибка исказила экономический смысл решения и ответа. Например, если ошибка приводит к тому, что равновесный ВВП оказался меньше, чем какой-то из его компонентов (потребление, инвестиции или госзакупки), либо к тому, что ВВП или госзакупки оказались отрицательной величиной, то такая ошибка должна соответствовать большей потере баллов: эти ответы противоречат даже не макроэкономической интуиции, а здравому смыслу и логике.

а) Всего за пункт — 20 баллов.

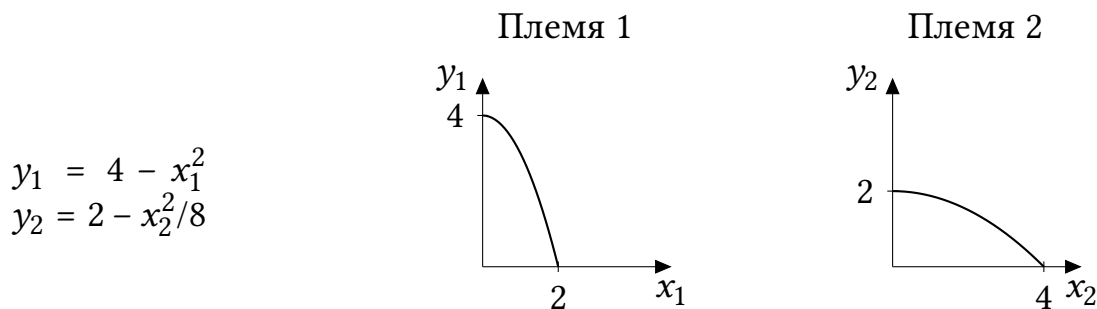
- Записано основное макроэкономическое тождество для закрытой экономики (удобнее всего в данном случае представить его как равенство дохода и совокупных расходов, но приемлемы и ещё два равенства — инвестиций и суммарных сбережений, а также инъекций и изъятий) — 4 балла.
- Составлено уравнение либо система двух уравнений (с двумя переменными — Y_1 и G_1), из которого/которой можно получить правильное значение G_1 , — 4 балла.
- Решено составленное уравнение (или составленная система) и предъявлено значение G_1 — 4 балла.
- Составлено уравнение либо система двух уравнений (с двумя переменными — Y_2 и G_2), из которого/которой можно получить правильное значение G_2 , — 4 балла.
- Решено составленное уравнение (или составленная система) и предъявлено значение G_2 — 4 балла.

б) Всего за пункт — 10 баллов.

- С опорой на выкладки пункта а) оптимизационная задача правительства сформулирована как функция одной переменной (G или Y) — 4 балла.
- Корректно решена задача правительства — предъявлено значение G^* — 4 балла.
- Проверено условие второго порядка (любая из трёх формулировок: либо сказано, что графиком функции потерь является квадратная парабола с ветвями вверх, либо сказано, что первая производная возрастает, либо сказано, что вторая производная положительна) — 2 балла.

Задание 8. Сложение квадратичных КПВ (30 баллов)

На острове Паабалор есть два племени, живущие охотой и собирательством. Племена потребляют мясо (x) и плоды (y). Уравнения и графики КПВ имеют вид:



а) (8 баллов) Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 3 единицы мяса?

б) (8 баллов) Какое максимальное количество плодов может быть собрано на острове, если всего нужно добыть 5 единиц мяса?

в) (14 баллов) Определите уравнение КПВ острова.

Решение

а) Найдем, как нужно разделить обязанности племен по добыче 3 единиц мяса, чтобы в итоге количество собранных плодов было максимально, то есть решим задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \rightarrow \max$$

при условии $x_1 + x_2 = 3$, а также $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$.

Подставляя в целевую функцию $x_2 = 3 - x_1$, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (3 - x_1)^2/8 \rightarrow \max.$$

При этом найти максимум этой функции надо на отрезке $[0; 2]$, так как первое племя не может добыть больше 2 единиц мяса. При этом производство второго племени будет изменяться от 1 до 3. Эти количества для второго племени возможны, так что дополнительных ограничений не возникает. Находя вершину этой параболы с ветвями вниз, получаем, что $x_1^* = 1/3$, что принадлежит отрезку $[0; 2]$. Значит, это и есть искомый максимум. Второе племя будет производить $3 - 1/3 = 8/3$ единиц мяса. Общее количество собранных плодов при этом равно $6 - (1/3)^2 - (8/3)^2/8 = 5$.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (3 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[1; 3]$, так как $x_2 \leq 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \geq 0$, и $x_2 \geq 1$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leq 2$.

Кроме того, точку $x_1^* = 1/3$ можно получить, приравнявая производную целевой функции к нулю, или, что эквивалентно, приравнявая альтернативные издержки производства для двух племен. Для первого племени альтернативные издержки равны $|(4 - x_1^2)'| = 2x_1$, для второго — $|(2 - x_2^2/8)'| = x_2/4$.

б) Теперь нужно решить задачу

$$y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \rightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = 5$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Аналогично пункту а), получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8 \rightarrow \max.$$

Второе племя не может добыть больше 4 единиц мяса. Значит, первому племени надо будет добыть минимум одну единицу мяса. Таким образом, максимум этой функции мы будем искать на отрезке $[1; 2]$. Вершиной данной параболы с ветвями вниз является точка $x_1 = 5/9 < 1$, и значит, максимум будет достигаться на краю отрезка, в точке $x_1^* = 1$. Второе племя произведет все оставшиеся четыре единицы, а количество собранных плодов будет равно 3.

Тот же ответ можно получить, если оптимизировать по x_2 функцию $6 - (5 - x_2)^2 - x_2^2/8$. Оптимизировать нужно на отрезке $[3; 4]$; $x_2 \geq 3$ в силу ограничения на общее количество мяса и $x_1 \leq 2$.

Кроме того, решение $x_1^* = 1$ можно получить, если заметить, что производная целевой функции $6 - x_1^2 - (5 - x_1)^2/8$ отрицательна на отрезке $[1; 2]$, или, что эквивалентно, для любого $x_1 \in [1; 2]$ альтернативные издержки добычи мяса первым племени в точке x_1 больше, чем альтернативные издержки добычи мяса вторым племени в точке $5 - x_1$.

в) КПВ есть не что иное, как график функции, показывающей, какое максимальное количество Игрека можно произвести, если всего требуется произвести X единиц Икса. Две точки на КПВ острова мы уже нашли – $(3; 5)$ и $(5; 3)$. Теперь осталось найти остальные, решив ту же задачу максимизации уже для произвольного значения X , то есть

$$Y = y_1 + y_2 = 6 - x_1^2 - x_2^2/8 \rightarrow \max$$

при условиях $x_1 + x_2 = X$, $x_1 \in [0; 2]$, $x_2 \in [0; 4]$. Ясно, что $X \in [0; 6]$.

Переходя к оптимизации по одной переменной, получаем задачу

$$6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8 \rightarrow \max,$$

где X – параметр.

Если $X \leq 4$, эту задачу надо решать на отрезке $[0; 2]$ – для любого $x_1 \in [0; 2]$, второе племя сможет произвести $X - x_1$. Если же $X > 4$, $x_1 \in [X - 4; 2]$, так как первое племя должно будет произвести минимум $X - 4$ единицы мяса.

Нетрудно определить, что вершина параболы с ветвями вниз $6 - x_1^2 - (X - x_1)^2/8$ находится в точке $x_1 = X/9$.

Случай 1. $X \leq 4$, и поэтому $x_1 \in [0; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку для любого $X \leq 4$, а значит, $x_1^*(X) = X/9$ будет решением задачи. Тогда $Y = 6 - (X/9)^2 - (8X/9)^2/8 = 6 - X^2/9$.

Случай 2. $X \in (4; 6]$, и поэтому $x_1 \in [X - 4; 2]$. $X/9$ принадлежит этому отрезку при $X/9 \geq X - 4$, или $X \leq 4,5$. Значит, решением будет

$$x_1^*(X) = \begin{cases} X/9, & X \leq 4,5; \\ X - 4, & X > 4,5. \end{cases}$$

Действительно, если вершина параболы с ветвями вниз лежит левее допустимого отрезка, оптимум достигается в левом конце отрезка. При $X > 4,5$ максимальное количество собранных плодов будет равно

$$Y = 4 - (X - 4)^2 + 0 = 4 - (X - 4)^2.$$

Обобщая, получаем, что КПВ острова задается уравнением

$$Y = \begin{cases} 6 - X^2/9, & X \leq 4,5; \\ 4 - (X - 4)^2, & 4,5 \leq X \leq 6. \end{cases}$$

Тот же ответ можно получить, оптимизируя по x_2 и обобщая анализ в пунктах а) и б). При $X < 2$ максимизацию по x_2 нужно проводить на отрезке $[0; 4]$, а при $X \geq 2$ — на отрезке $[X - 2; 4]$. Граничное значение $X = 4,5$ определяется из условия $8X/9 = 4$.

Кроме того, решить пункт можно с помощью производной или анализа альтернативных издержек. При $X \leq 4,5$ является доступным распределение $(x_1, x_2) = (X/9, 8X/9)$, при котором производная целевой функции равна нулю (альтернативные издержки двух племен равны). Поскольку альтернативные издержки обоих племен возрастают, производная целевой функции убывает, и значит, это точка максимума. При $X > 4$ это распределение не является доступным, так как $8X/9 > 4$. При оптимизации по x_1 производная целевой функции отрицательна на отрезке $[X - 4; 2]$ — альтернативные издержки первого племени больше в точке x_1 , чем альтернативные издержки второго племени в точке $X - x_1$ — и потому оптимальным является минимальное значение x_1 , то есть $X - 4$.

Примечание 1: КПВ острова имеет вид

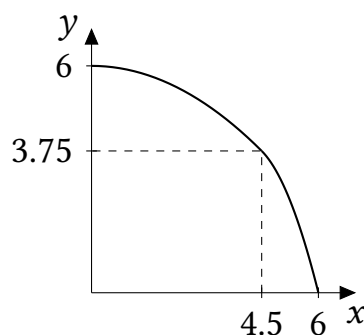


Рис. 8.1: КПВ острова.

Можно показать, что излома в точке $(4,5; 3,75)$ нет, наклон КПВ как при приближении слева, так и при приближении справа к этой точке стремится к единице. Подумайте, почему так происходит.

Примечание 2: В данном случае альтернативные издержки не являются постоянными и стремятся к нулю для малых значений x для обоих племен. Поэтому найти суммарную КПВ методом определения «порядка», в котором племена должны производить x (как в случае, если хотя бы одна из двух КПВ является линейной), не представляется возможным. Тем не менее, найденное решение отражает то, что альтернативные издержки производства Икса для первого племени растут быстрее (то есть

оно «в целом хуже» производит Икс). Действительно, при $X < 4,5$ при оптимальном распределении производства первое племя производит лишь одну девятую общего объема, а второе — восемь девярых. И лишь когда производственных возможностей второго племени становится недостаточно, доля Икса, произведенного первым племенем, растет.

Схема проверки

а) Всего за пункт — 8 баллов.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — 2 балла.
- Переход к оптимизации по одной переменной — 1 балл.
- Нахождение кандидата на оптимум x_1 или x_2 через вершину параболы или производную (равенство альтернативных издержек) — 1 балл.
- Проверка достаточных условий максимума (указание на направление ветвей параболы вниз, на смену знака первой производной с плюса на минус, отрицательность второй производной или указание на то, что альтернативные издержки возрастают) — 1 балл.
- Проверка того, что найденное значение x_1 принадлежит отрезку $[0; 2]$, — 1 балл.
- Проверка того, что найденное значение x_2 принадлежит отрезку $[0; 4]$, — 1 балл.
- Определение максимального значения Y — 1 балл.

б) Всего за пункт — 8 баллов.

- Выписывание функции двух переменных, которую нужно максимизировать, — 2 балла.
- Переход к оптимизации по одной переменной — 1 балл.
- Правильное определение краевого оптимума $(x_1^*, x_2^*) = (1, 4)$ — 4 балла., причем определить его можно двумя способами: (1) найти вершину соответствующей параболы, отметить, что вершина не принадлежит допустимому отрезку, сослаться на направление ветвей параболы и сделать вывод, что оптимум достигается на границе отрезка; (2) с помощью производной доказать, что функция монотонна на допустимом отрезке, и потому оптимум достигается на указанной границе отрезка. Второй способ эквивалентен сравнению альтернативных издержек в соответствующих точках.
- Определение максимального значения Y — 1 балл.

Если участник сделал вывод, что решение будет в вершине параболы, за пункт при верных вычислениях ставится 3 балла.

Если участник сослался на симметрию и вывел ответ из результата пункта а): «в а) получилось, что при $X = 3$ максимальное значение Y равно 5, значит при $Y = 5$ максимальное значение X равно 3, и значит, в силу симметрии, при $X = 5$ максимальное Y равно 3, — за пункт ставится 0 баллов, так как в данной задаче симметрии между X и Y нет, КПВ племен не переходят друг в друга при симметрии относительно $Y = X$, и итоговая КПВ также не является симметричной.

в) Всего за пункт — 14 баллов.

- Постановка оптимизационной задачи при произвольном X — 5 баллов.

- Переход к оптимизации по одной переменной — 1 балл.
- Правильное для каждого X определение отрезка, на котором производится оптимизация, — 2 балла.
- Определение вершины параболы или точки, где производная равна нулю (альтернативные издержки равны), — 1 балл.
- Определение того, при каких X решение достигается в вершине параболы, а при каких — на границе отрезка (получение критического значения $X = 4,5$) — 4 балла. Участник должен пояснить, почему оптимум достигается на границе отрезка — либо с помощью ссылки на направление ветвей параболы, либо обосновывая монотонность функции с помощью производной. Если этого не сделано, 1 балл снимается.
- Расчет максимального значения Y — 1 балл.