Разбор решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады по математике, 2022 год

11 класс

Общие критерии оценивания

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Задача 1

1. ***Какое число больше***

$$\mathbf{2^{3^{100}}} \textit{ или } \mathbf{3^{2^{150}}}?$$

***Ответ*: первое**

***Решение.* Операции в башне выполняются сверху вниз, т.е. нужно найти знак неравенства между числами**

$$\mathbf{2^{\left(3^{100}\right)} \vee 3^{\left(2^{150}\right)}}$$

Возведем обе части сравнения в степень $\frac{1}{2^{150}}$:

$$\mathbf{2^{\left(3^{100}\right)^{\frac{1}{2^{150}}}} \vee 3^{\left(2^{150}\right)^{\frac{1}{2^{150}}}}}$$

При возведении степени в степень показатели перемножаются. В результате получим

$$\mathbf{2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}} \vee 3}$$

Перепишем показатель степени $2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}}$ в виде $2^{\frac{3^{2\cdot 50}}{2^{3\cdot 50}}}$ и далее $2^{\frac{\left(3^{2}\right)^{50}}{\left(2^{3}\right)^{50}}} = 2^{\left(\frac{9}{8}\right)^{50}}$

Продолжение задачи 1

Применим неравенство Бернулли $(1+a)^n > 1+na$ к степени $\left(\frac{9}{8}\right)^{50}$:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{50} = \left(1+\frac{1}{8}\right)^{50} > 1+\frac{50}{8} > 2$$

Итак, после преобразований имеем цепочку неравенств

$$2^{\frac{3^{100}}{2^{150}}} = 2^{\left(\frac{9}{8}\right)^{50}} > 2^2 = 4 > 3$$

Откуда следует, что $2^{\left(3^{100}\right)} > 3^{\left(2^{150}\right)}$

Критерий оценивания задачи 1

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Оба числа возводятся в степень $\frac{1}{2^{150}}$ - 3 балла.
- Сделаны преобразования до прямого использования неравенства Бернулли – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 2

Решить уравнение

$$x^3 - 300x = 2961$$

***Ответ*: $x = 21$**

***Решение*. Докажем сначала, что данное уравнение имеет единственный корень. Введем функцию $f(x) = x^3 - 300x$. Исследуем эту функцию на интервалы монотонности и экстремумы. Найдем производную $f'(x) = 3x^2 - 300$ и критические точки, в которых $f'(x) = 0$. Имеем $3x^2 - 300 = 0$, тогда $x_{1,2} = \pm 10$. Найдем знак производной на интервалах, ограниченных критическими точками. Далее используем теорему о достаточных условиях монотонности функции**

Продолжение задачи 2

x	< -10	-10	$-10 < x < 10$	10	> 10
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	2000	$\searrow$	-2000	$\nearrow$

Следовательно, графики функции $y = x^3 - 300x$ и $y = 2961$ (т.к. $2961 > 2000$) имеют только одну общую точку, т.е. данное уравнение $x^3 - 300x = 2961$ имеет единственное решение.

Попробуем найти его в предположении, что оно целое число. Вычислим $f(20) = 2000 < 2961$, $f(30) = 18000 > 2961$, следовательно, корень уравнения лежит на интервале $(20, 30)$. Заметим, что число 2961 оканчивается на 1, тогда из структуры уравнения следует, что целый корень, если он есть, должен оканчиваться на 1. Проверка дает, что $f(21) = 2961$. Итак, $x = 21$ – корень данного уравнения.

Критерий оценивания задачи 2

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – 2 балла
- Доказано, что уравнение имеет единственный корень, но он не найден – 4 балла.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 3

На доске написано некоторое двузначное число. Ученик сказал, что оно делится на 3, 4, 5, 9, 10, 15, 18, 30. Учитель математики, услышав это, сказал, что тот ошибся ровно 4 раза. Какое число могло быть написано на доске? Укажите все возможные варианты.

Ответ: **36, 45 или 72.**

Решение. **Пусть N — написанное на доске двузначное число. Если бы N делилось на 30, то оно также бы делилось на 3, 5, 10, 15, поэтому ученик ошибся бы не более 3 раз, противоречие. Если бы N не делилось на 3, то оно также бы не делилось на 9, 15, 18, 30, поэтому ученик ошибся бы хотя бы 5 раз, противоречие. Следовательно, N делится на 3, но не делится на 30. Отсюда сразу следует, что N не делится на 10. Значит, среди утверждений про делимость на 4, 5, 9, 15, 18 верны ровно три.**

Продолжение задачи 3

Число *N*, делящееся на 3, не может одновременно делиться на 4 и 5 (иначе оно делилось бы и на 30). Следовательно, среди утверждений про делимость на 9, 15, 18 верны хотя бы два. Если бы *N* не делилось на 9, то оно также бы не делилось и на 18, противоречие. Следовательно, *N* делится на 9. Кроме того, *N* делится на 15 или на 18. Рассмотрим два случая.

• Пусть *N* делится на 15. Поскольку оно также делится и на 9, то оно равно либо 45, либо 90. Но *N* не может быть равно 90, поскольку *N* не делится на 30. При этом *N* может быть равно 45 (ведь 45 делится на 3, 5, 9, 15 и не делится на 4, 10, 18, 30).

• Пусть *N* не делится на 15. Тогда оно делится на 18, и оно равно либо 18, либо 36, либо 54, либо 72, либо 90. Опять же, *N* не может быть равно 90, поскольку *N* не делится на 30. Также *N* не может быть равно 18 и 54 (ведь 18 и 54 оба делятся на 3, 9, 18 и оба не делятся на 4, 5, 10, 15, 30). При этом *N* может быть равно 36 или 72 (ведь 36 и 72 оба делятся на 3, 4, 9, 18 и оба не делятся на 5, 10, 15, 30).

Итого получилось три возможных варианта: 36, 45 и 72.

Критерий оценивания задачи 3

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – от 1 до 3 баллов
- Доказано, что число *N* делится либо на 15, либо на 18 – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 4

Можно ли задать последовательность натуральных чисел $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\}$ ***с помощью некоторого правила так, чтобы любое натуральное число можно было бы представить в виде разности двух её членов.***

Если такая последовательность существует, то привести несколько первых её членов.

***Ответ*: такая последовательность существует: $1; 2; 5; 7; 15; 22; \dots$**

***Решение*. Члены последовательности будем порождать парами. Полагаем $a_1 = 1, a_2 = 2$. Пусть построено k пар членов этой последовательности. Построим $(k+1)$ –ую пару. Для этого рассмотрим всевозможные разности, которые можно найти с помощью имеющихся k пар членов последовательности, и обозначим через d наименьшую положительную разность, которая еще не реализована. Определяем $a_{2k+1} = 2a_{2k} + 1$ и $a_{2k+2} = a_{2k+1} + d$, в результате получаем требуемую последовательность. Такой способ задания числовой последовательности называется *рекуррентным*.**

Продолжение задачи 4

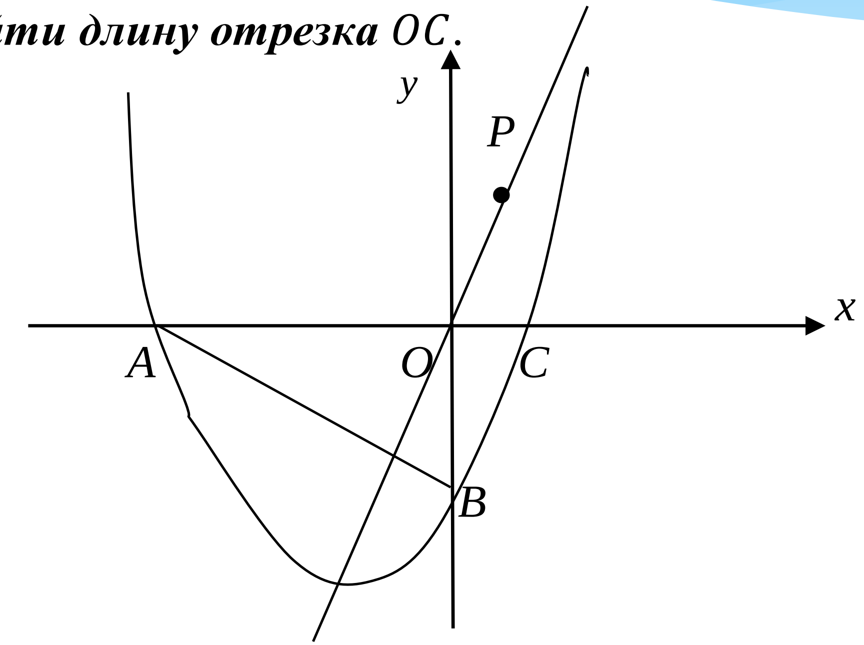
Приведем несколько первых её членов. $a_1 = 1, a_2 = 2$ мы уже определили. Эта пара реализует единственную разность $2 - 1 = 1$. Наименьшая разность, которая ещё не реализована, – это $d = 2$. Полагаем $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$ и $a_4 = a_3 + d = 5 + 2 = 7$. Легко сосчитать, что уже построенные члены последовательности a_1, a_2, a_3, a_4 реализуют положительные разности: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наименьшая нереализованная разность – это $d = 7$, тогда полагаем $a_5 = 2a_4 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$ и $a_6 = a_5 + d = 15 + 7 = 22$ и т.д.

Критерий оценивания задачи 4

- Обоснованное верное решение – 7 баллов.
- Только верный ответ – от 1 до 3 баллов
- Описан алгоритм порождения членов последовательности, но не оформлен в виде рекуррентной формулы – 5 баллов.
- Ход решения верный, но при вычислениях допущена арифметическая ошибка – вычесть 1 балл из оценки, которую бы поставили, если бы ошибки не было.

Задача 5

На рисунке изображен график квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$, про который известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = 2x$. Найти длину отрезка OC.



Ответ: 0,5.

Продолжение задачи 5

Решение, Пусть x_1 и x_1 – корни данного квадратного трехчлена и $x_1 < x_2$. Запишем координаты точек: $A(x_1, 0), C(x_2, 0), B(0, q)$. Прямая AB перпендикулярна прямой $y = 2x$, следовательно вектор $\overrightarrow{AB} = (0 - x_1, q - 0) = (-x_1, q)$ перпендикулярен вектору $\overrightarrow{OP} = (1, 2)$. Следовательно, их скалярное произведение равно 0: $-x_1 + 2q = 0$. По теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = q$. Значит, $x_2 = 0,5$. Таким образом, длина отрезка OC равна 0,5.

Критерий оценивания задачи 5

- Обоснованное верное решение – 7 баллов
- Только верный ответ – 2 баллов
- Указаны координаты точек *A*, *B*, *C* и их связь с корнями и коэффициентами квадратного трехчлена - 4 балла
- Верный ход решения, однако некоторые утверждения недостаточно обоснованы - от 4 до 6 баллов.